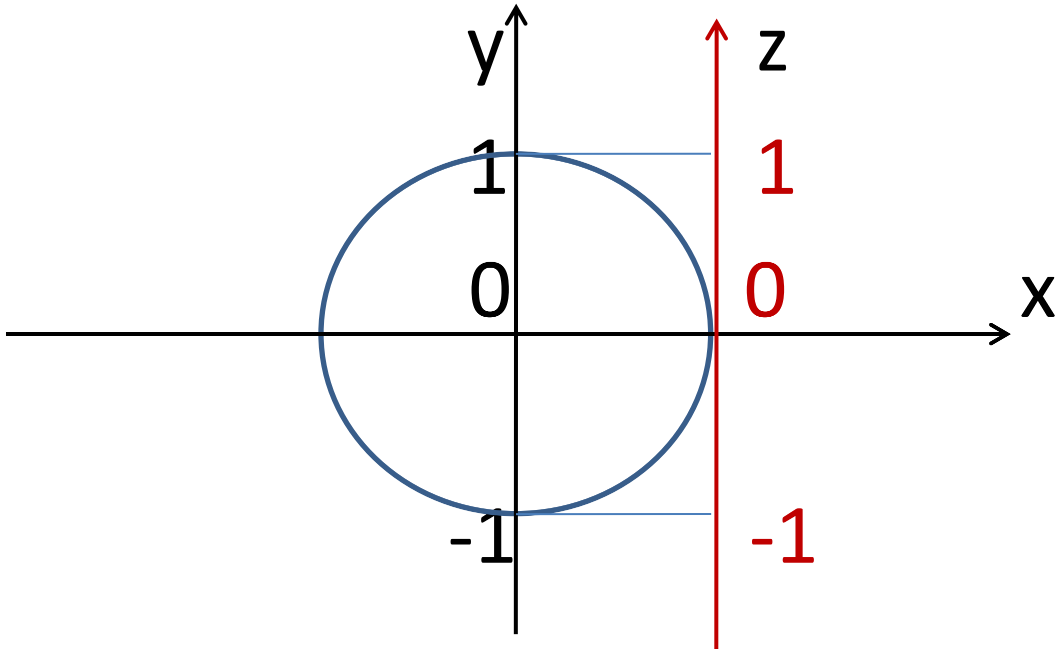
Chapitre 8 : TRIGONOMETRIE

I Le cercle trigonométrique.

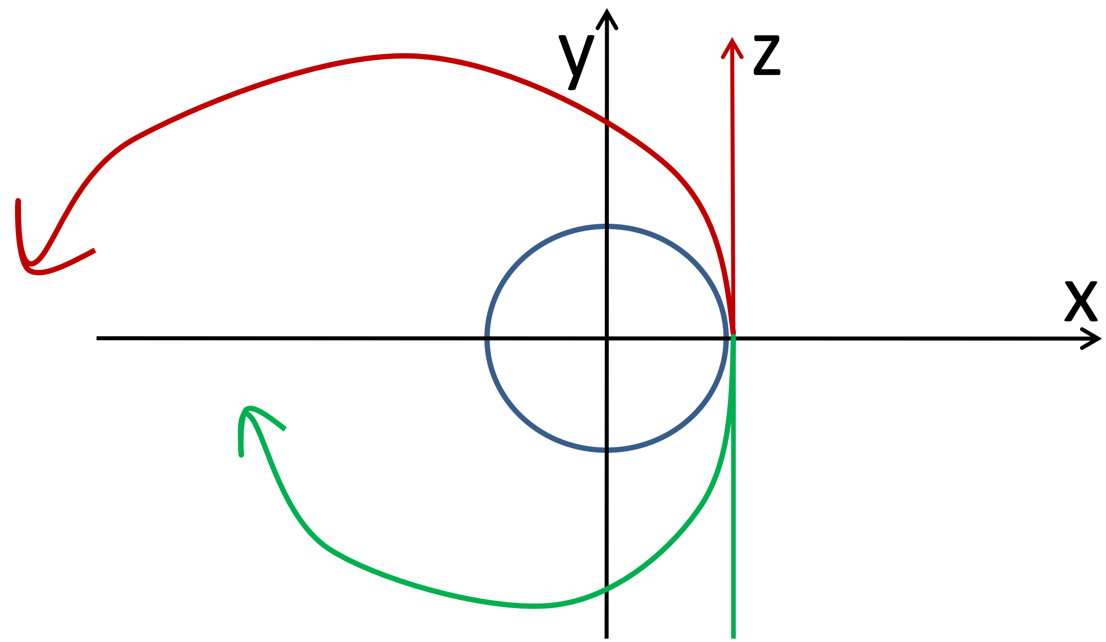
C'est un cercle de rayon 1,
dont le centre est l'origine du repère,
et le repère est orthonormé.

Il a été gradué par l'enroulement d'un axe z autour du cercle :

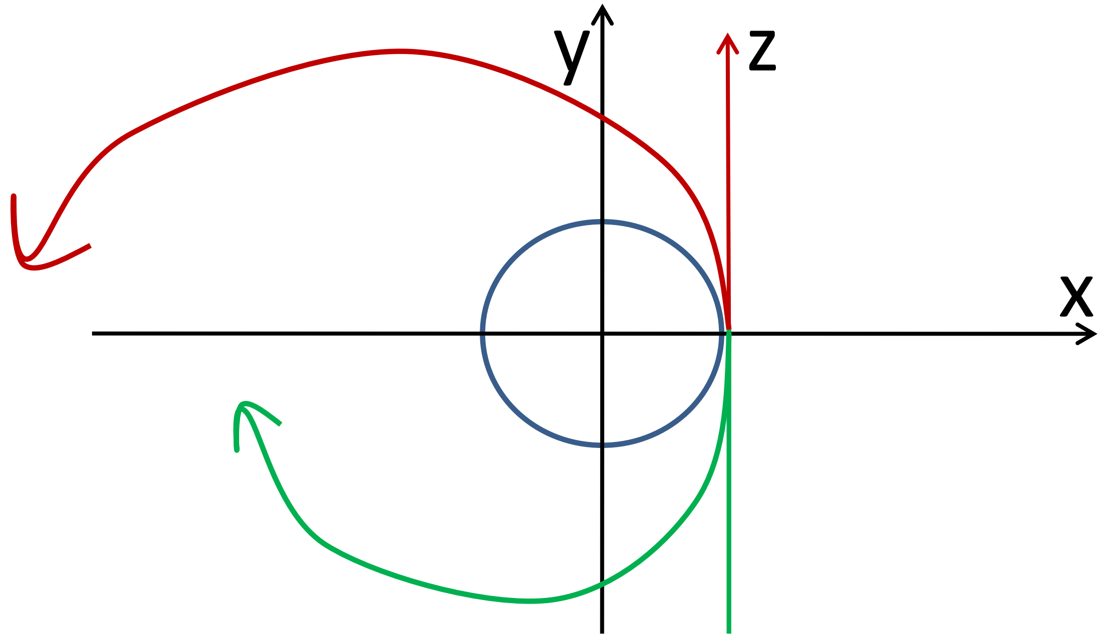
Il a été gradué par l'enroulement de l'axe z autour du cercle :



Il a été gradué par l’enroulement de l’axe z autour du cercle :

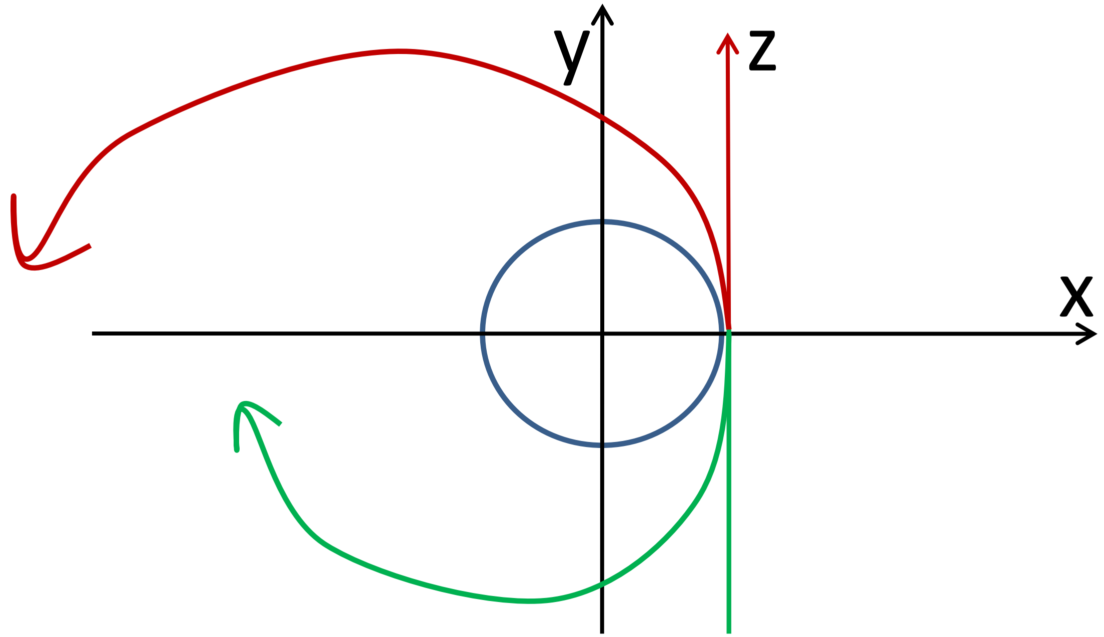


Le périmètre du cercle est :
… ?

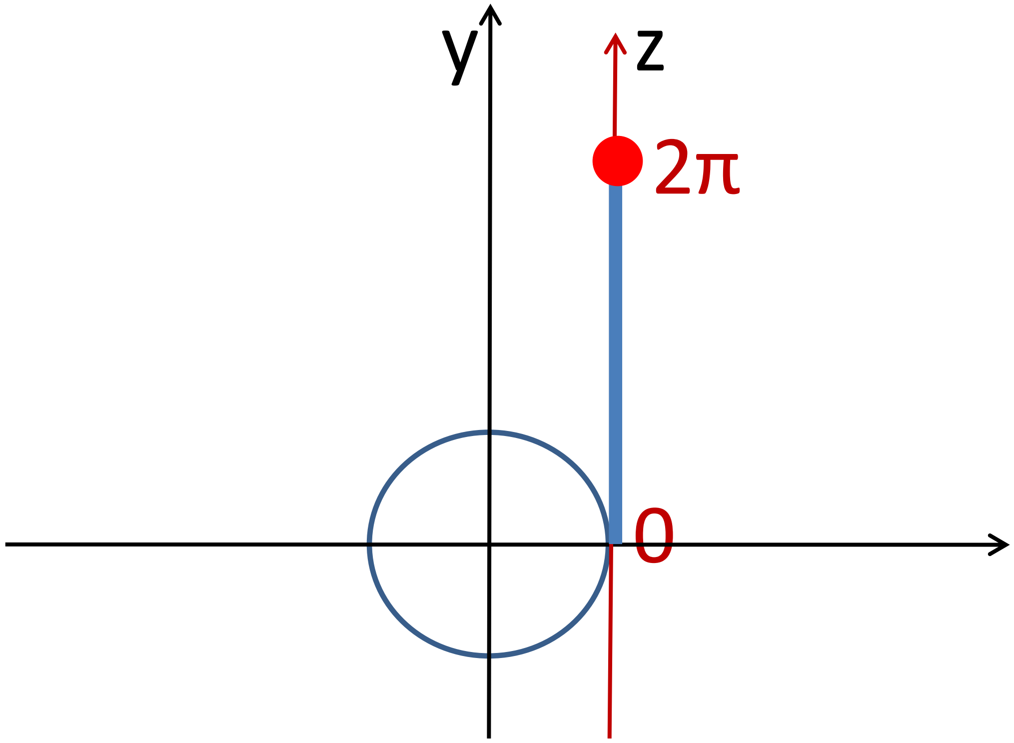


Le périmètre du cercle est :

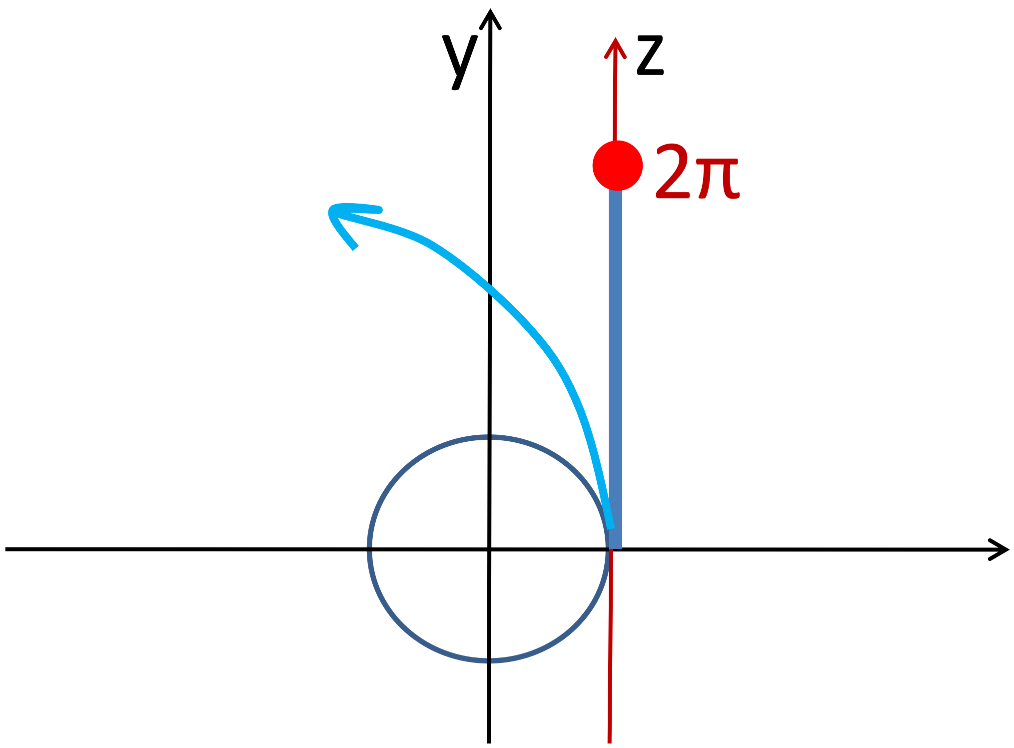
$2\pi R = 2\pi(1) = 2\pi$



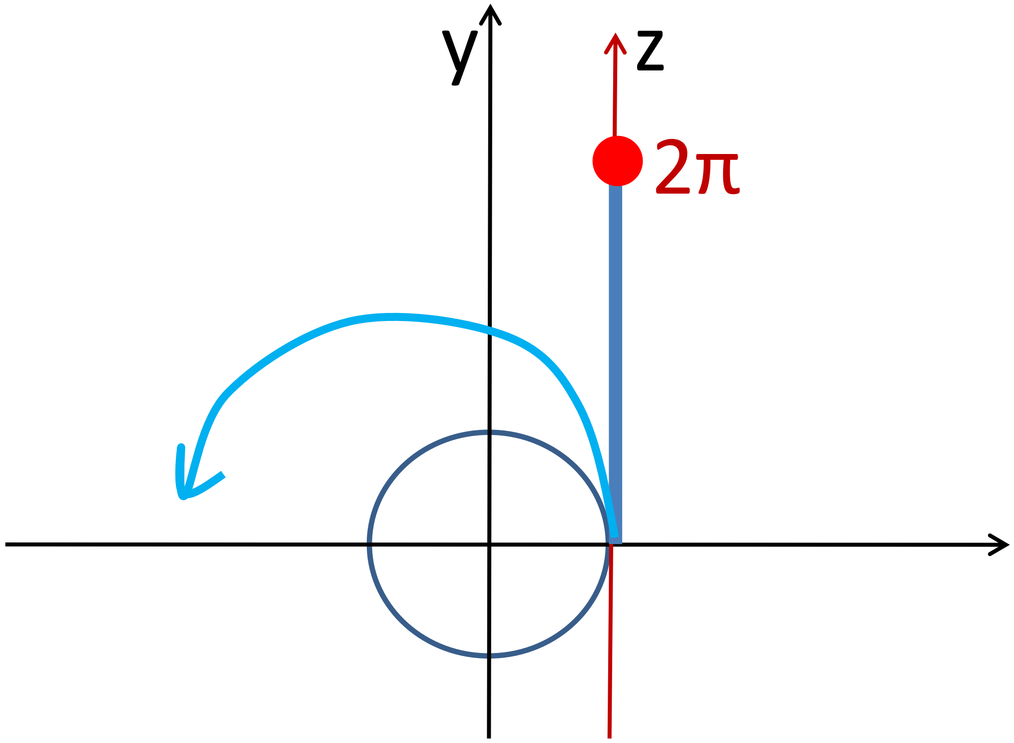
donc le réel $z = 2\pi$ arrive sur le cercle en :



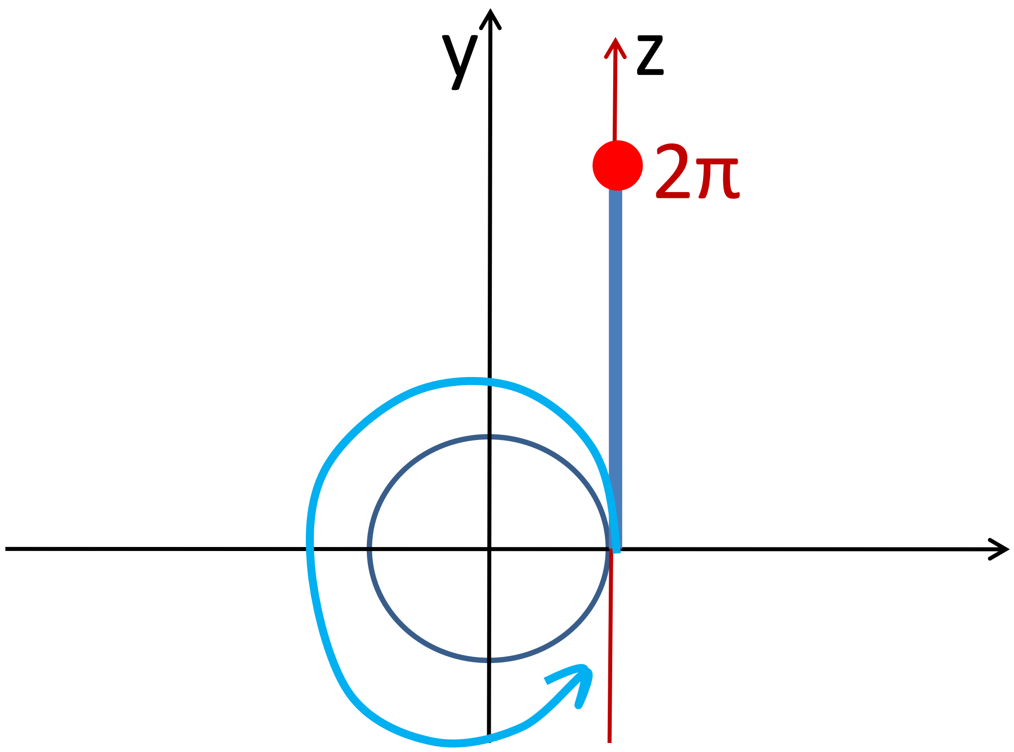
donc le réel $z = 2\pi$ arrive sur le cercle en :



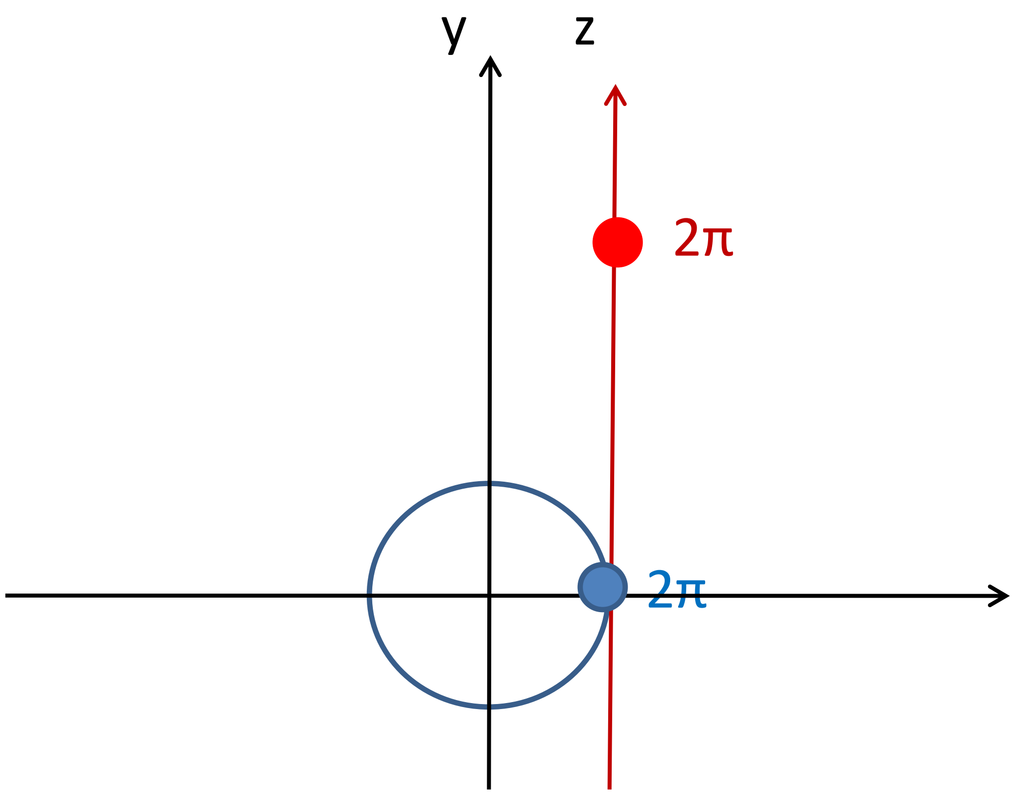
donc le réel $z = 2\pi$ arrive sur le cercle en :



donc le réel $z = 2\pi$ arrive sur le cercle en :

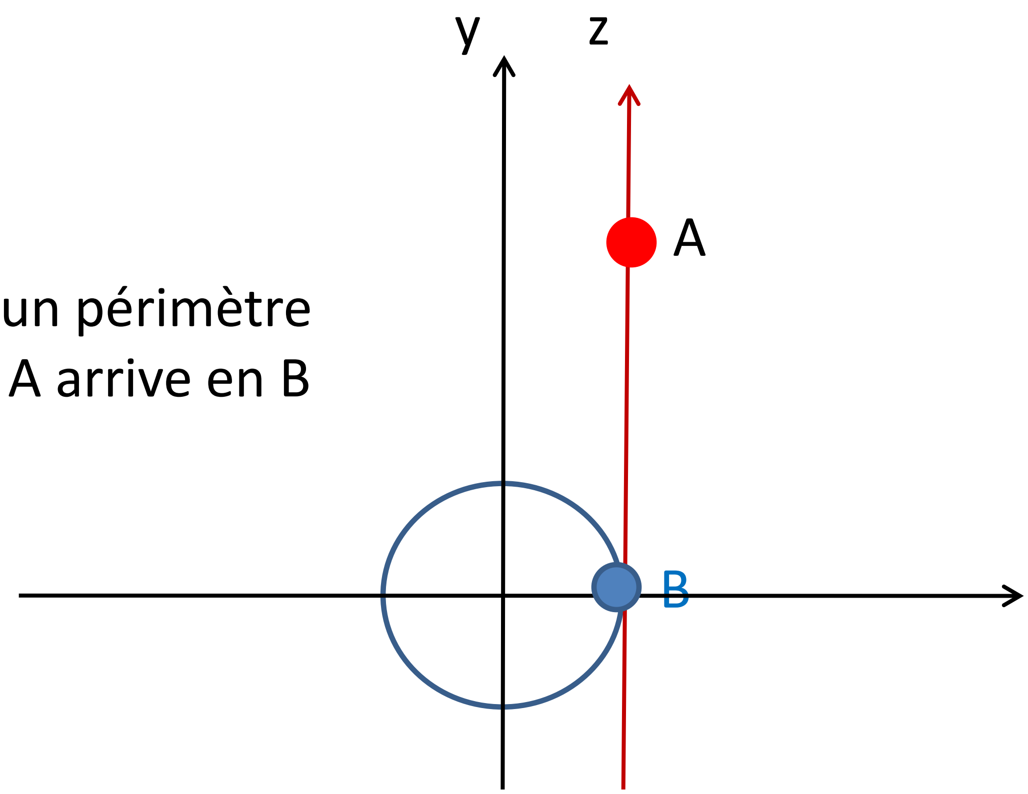


donc le réel $z = 2\pi$ arrive sur le cercle au même endroit que 0 :

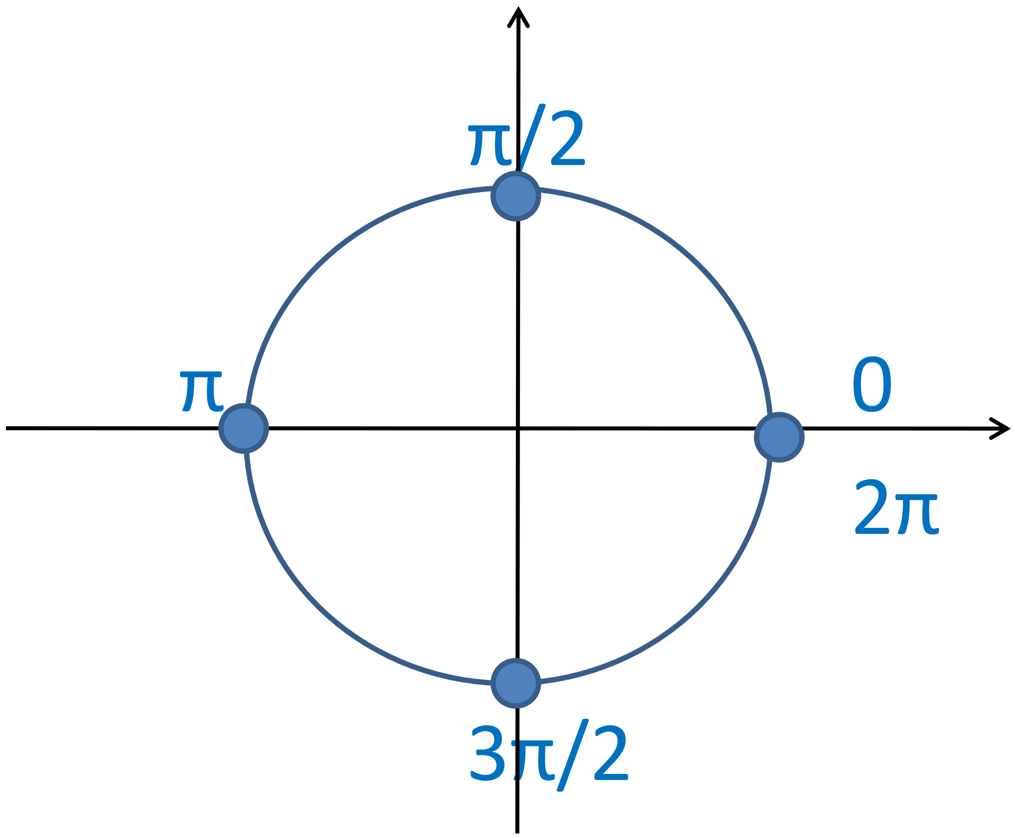


donc le réel $z = 2\pi$ arrive sur le cercle au même endroit que 0 :

AB = un périmètre
donc A arrive en B

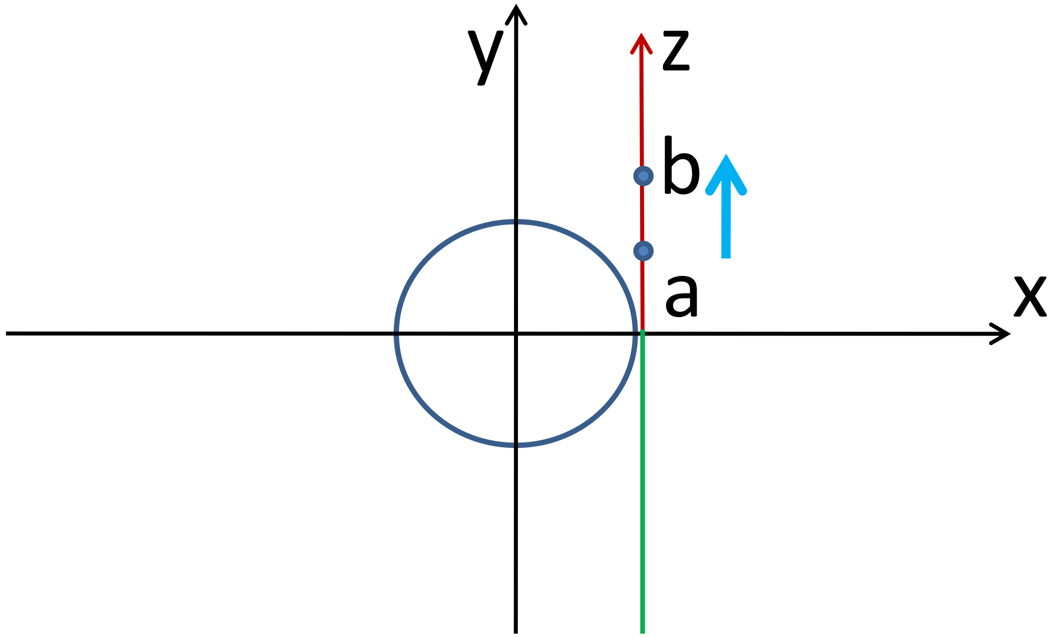


On a donc sur le cercle les réels z :



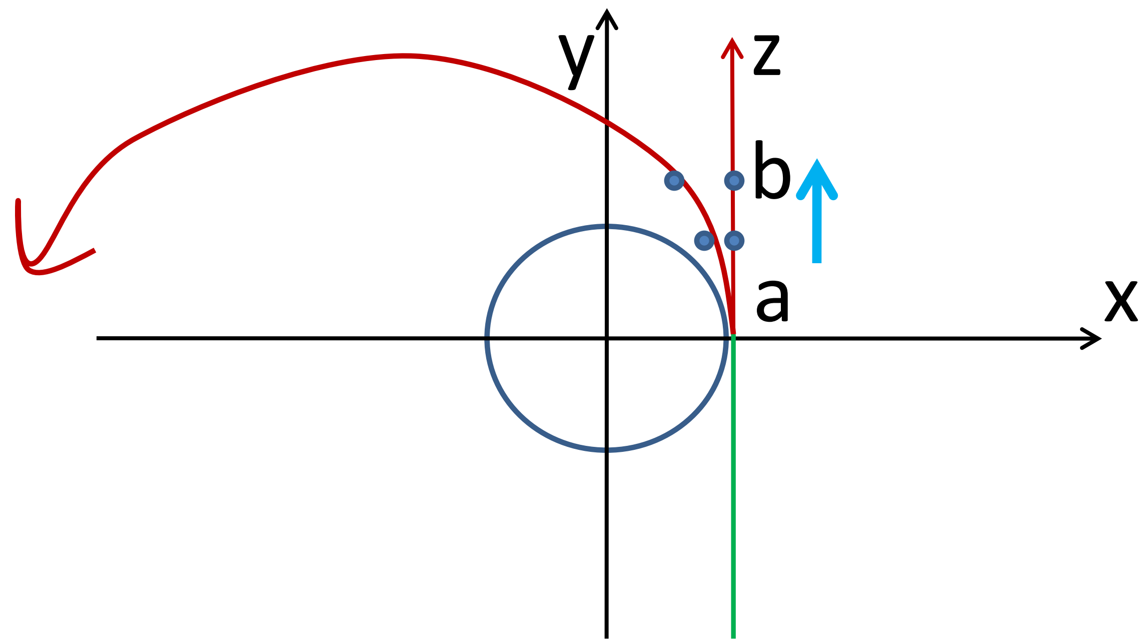
Sens trigonométrique :

Pour deux réels positifs a < b . On augmente de a à b.



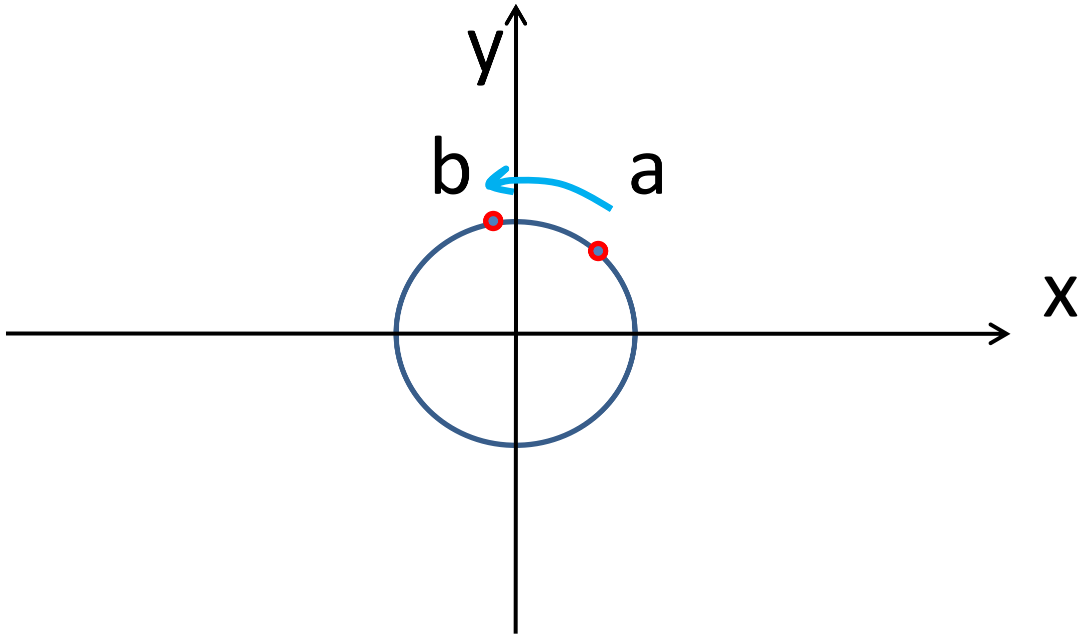
Sens trigonométrique :

Pour deux réels positifs a < b . Ils vont être enroulés sur le cercle



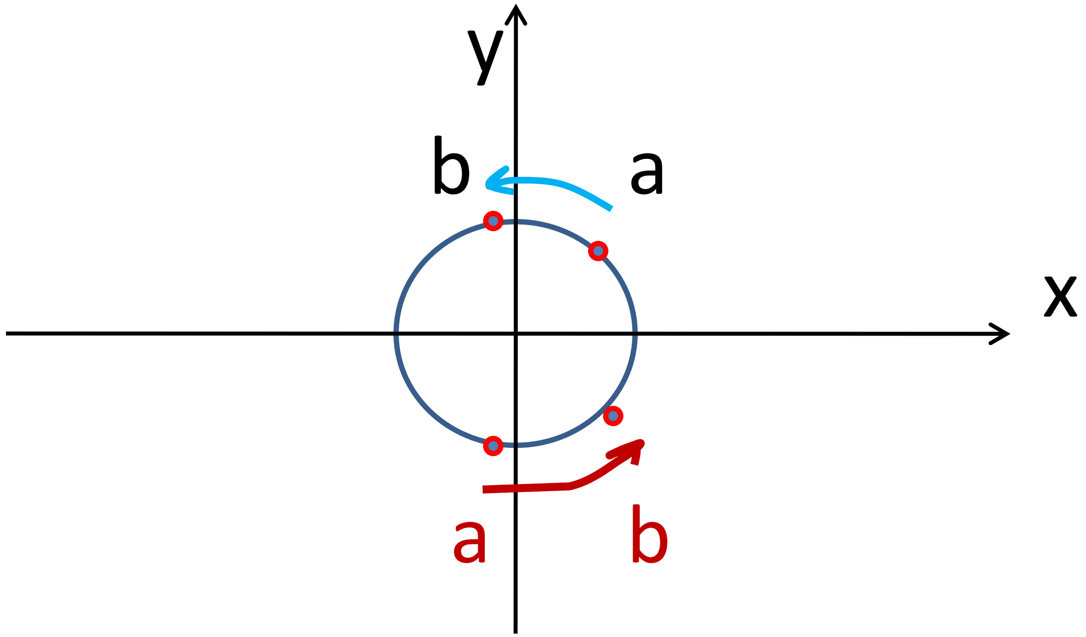
Sens trigonométrique :

Pour deux réels positifs a < b . Ils se suivent dans ce sens :



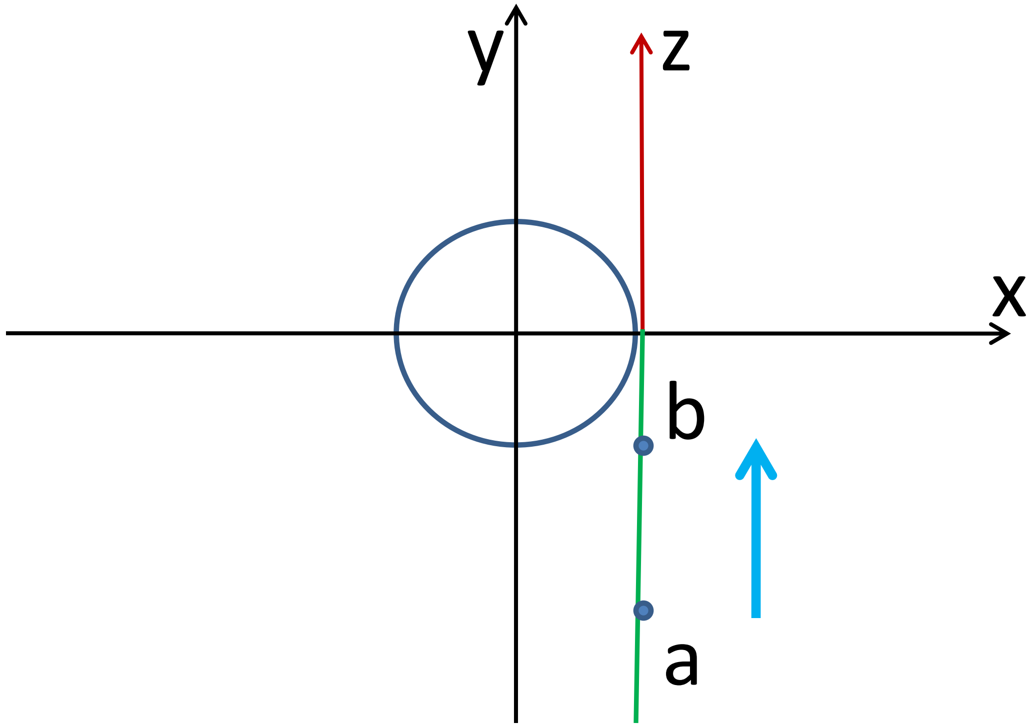
Sens trigonométrique :

Pour deux réels positifs a < b . Ils se suivent dans ce sens :



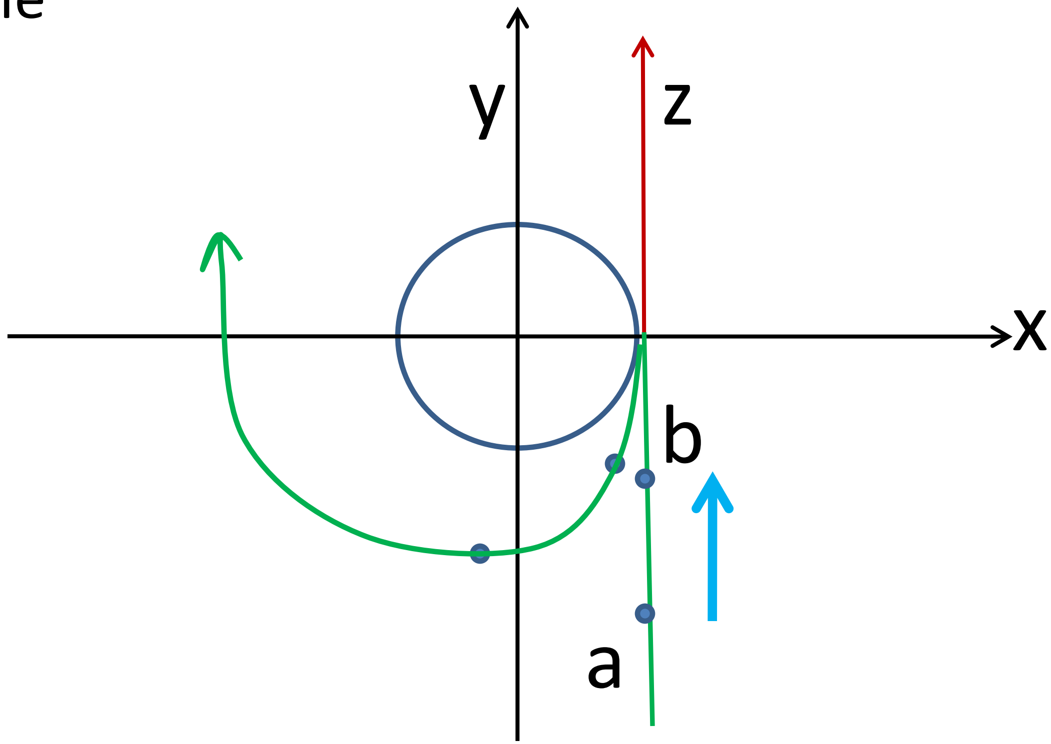
Sens trigonométrique :

Pour deux réels négatifs a < b . On augmente de a à b.



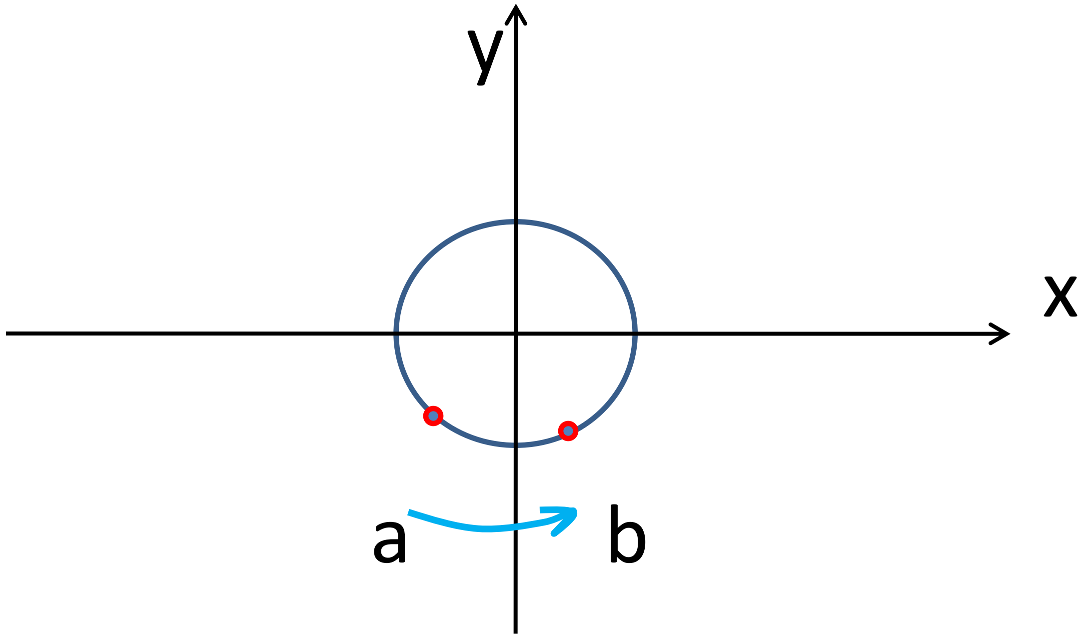
Sens trigonométrique :

Pour deux réels négatifs a < b . Ils vont être enroulés sur le cercle



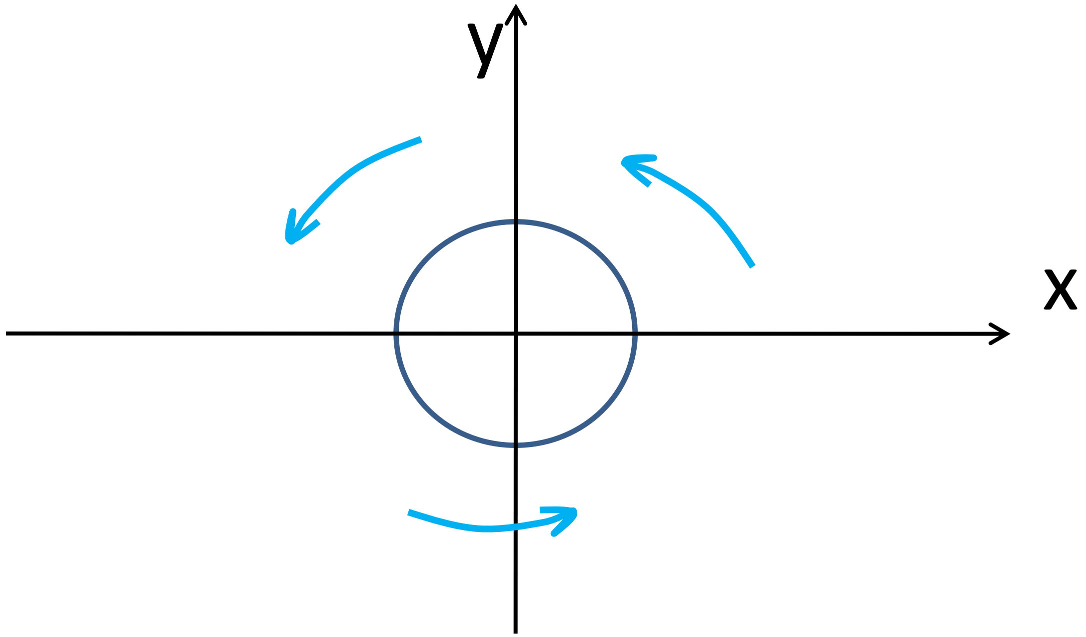
Sens trigonométrique :

Pour deux réels négatifs a < b . Ils vont se suivre dans ce sens :



Conclusion :

Pour deux réels, positifs ou négatifs, le **sens trigonométrique** suit le sens de l'augmentation.



Exercice : placez les réels suivants dans le cercle trigonométrique :

$A = 3\pi$

$B = -2\pi$

$C = 12600\pi$

$D = -10501\pi$

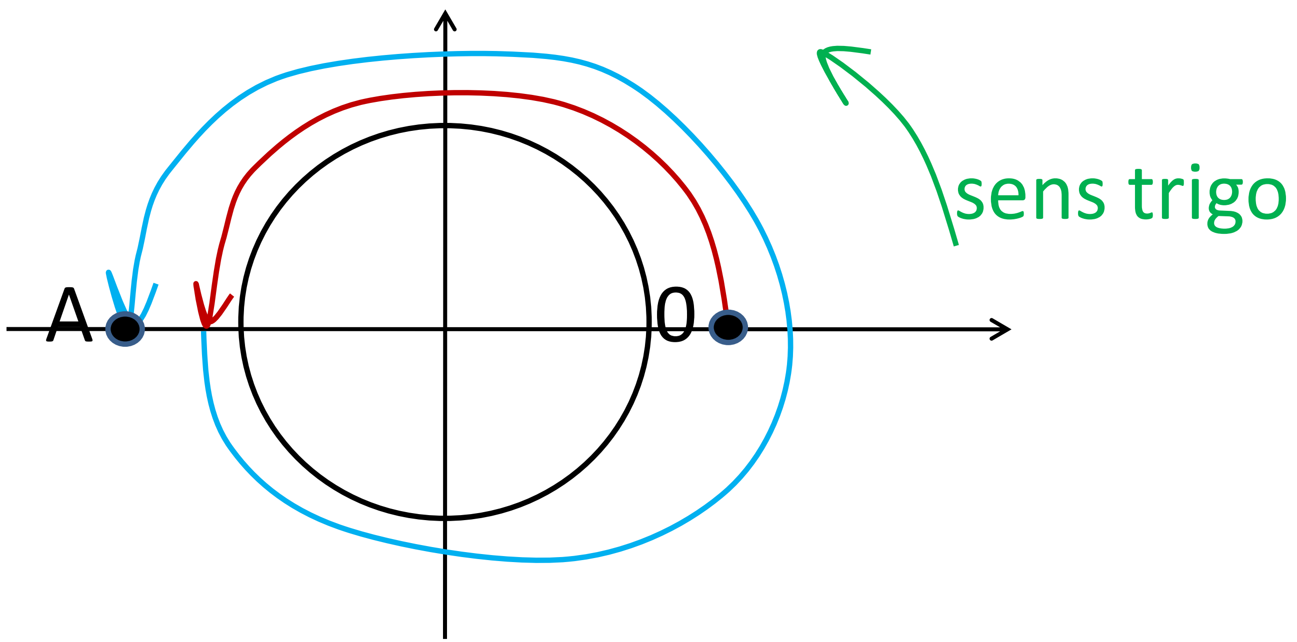
$E = \pi/4$

$F = 243\pi/2$

$A = 3\pi$

$A = 0 + \pi + 2\pi$

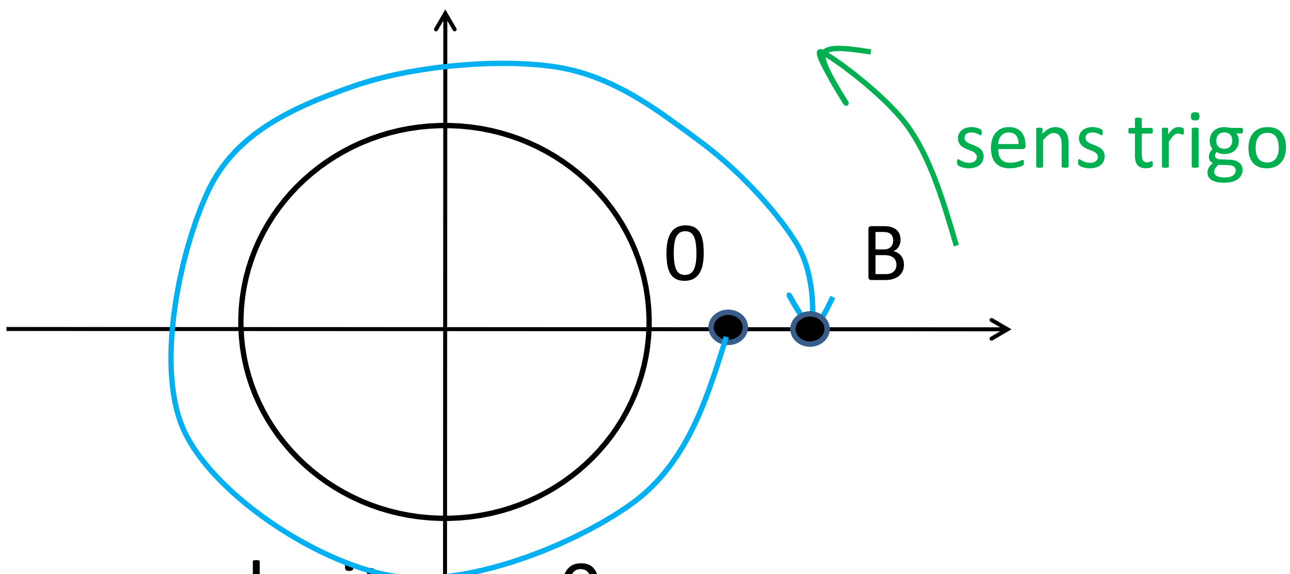
donc je pars de 0, j'avance (donc je suis le sens trigo) de ½ tour, puis de 1 tour :



$B = -2\pi$

$B = 0 - 2\pi$

donc je pars de 0, je recule (donc je suis le sens inverse du sens trigo) de 1 tour :

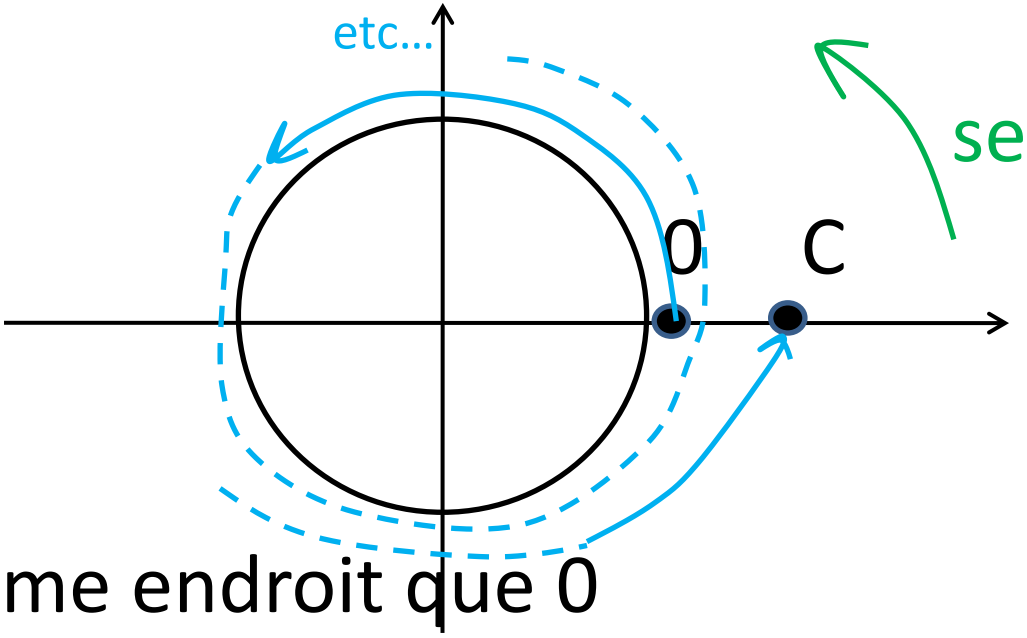


B est au même endroit que 0.

$C = 12600\pi$

$C = 0 + 6300(2\pi)$

donc je pars de 0, j'avance (donc je suis le sens trigo) de 6300 tours :

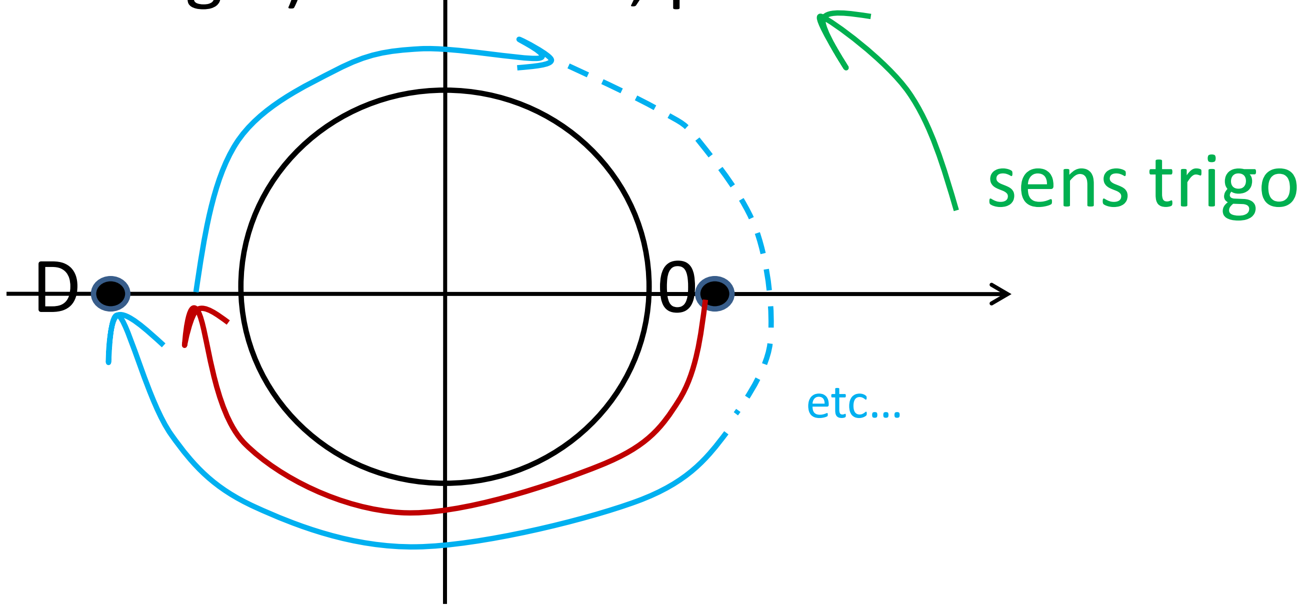


C est au même endroit que 0

D = - 10501π

D = 0 – π - 10500π = 0 – π – 5250(2π)

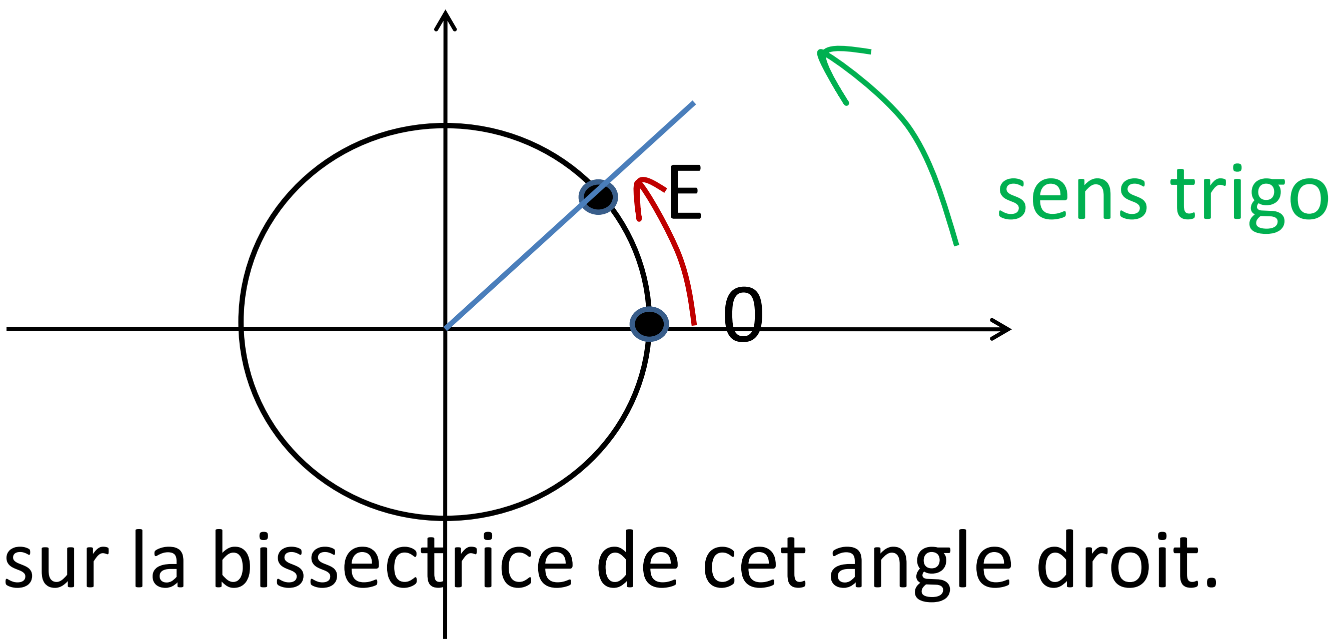
donc je pars de 0, je recule (donc je suis le sens inverse du sens trigo) de ½ tour, puis de 5250 tours :



$E = \pi/4$

$E = 0 + \frac{1}{2}\,(\pi/2) = 0 + \frac{1}{2}\,(\ \frac{1}{4}\ 2\pi)$

donc je pars de 0, j'avance (donc je suis le sens trigo) de ½ quart de tour :

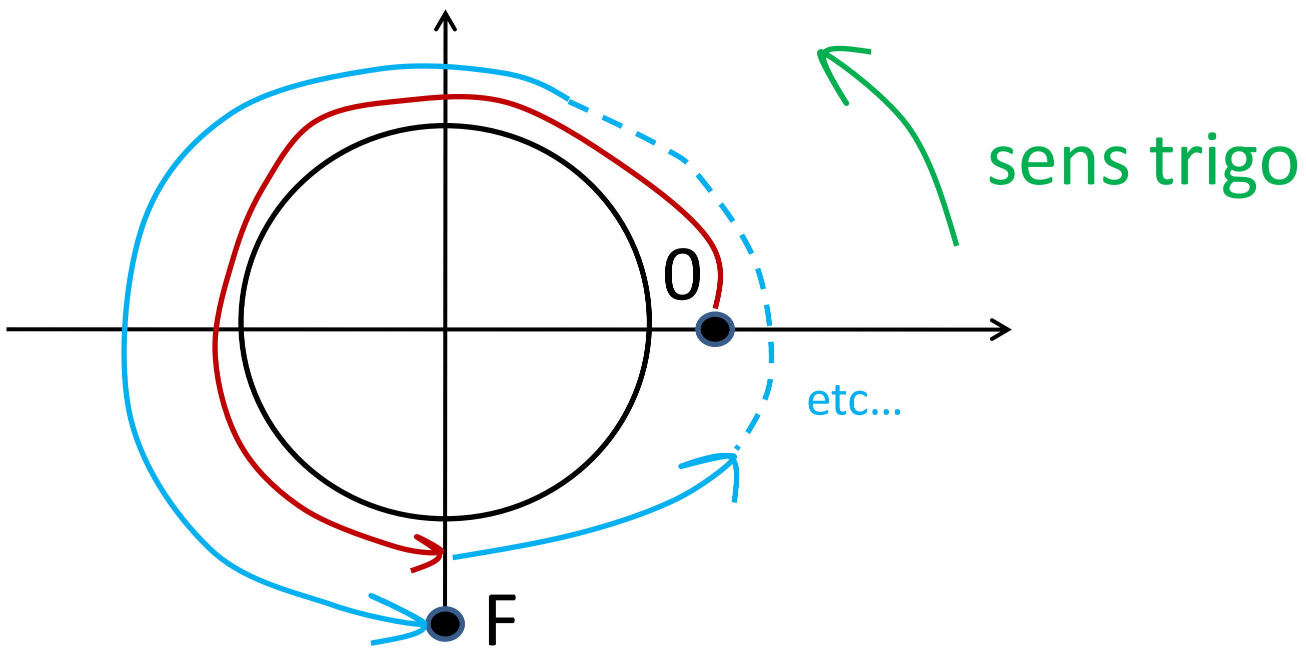


E se trouve sur la bissectrice de cet angle droit.

$F = 243\pi/2$

$F = 0 + 240\pi/2 + 3\pi/2 = 0 + 60(2\pi) + ¾\ (2\pi)$

donc je pars de 0, j'avance (donc je suis le sens inverse du sens trigo) de 3/4 tour, puis de 60 tours :



Réponses :

A = 3π

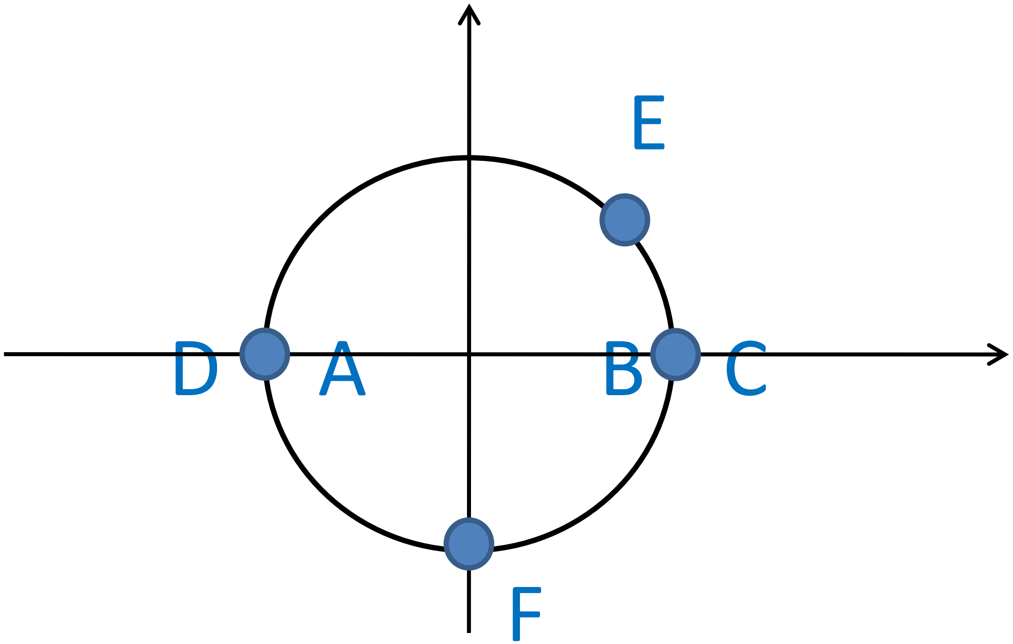
B = - 2π

C = 12600π

D = - 10501π

E = π/4

F = 243π/2



II Les radians :

1°) **Définition** : C'est une unité d'angle telle que

$$\boxed{\frac{\beta_{rad}}{2\pi} = \frac{\beta_{degré}}{360}}$$

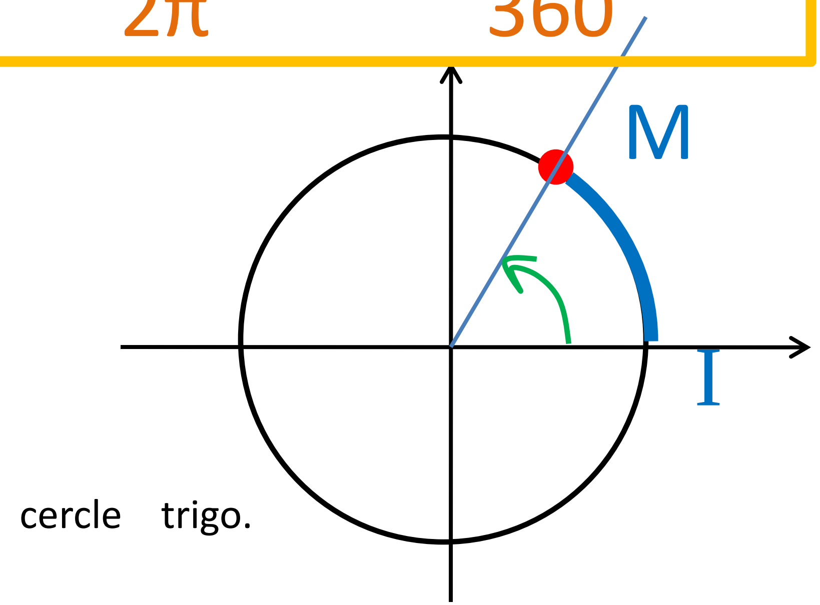
dont l'avantage est que

longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$

angle en radian

réel du point M

ont même valeur numérique.



II Les radians :

1°) **Définition** : C'est une unité d'angle telle que

$$\boxed{\frac{\beta_{rad}}{2\pi} = \frac{\beta_{degré}}{360}}$$

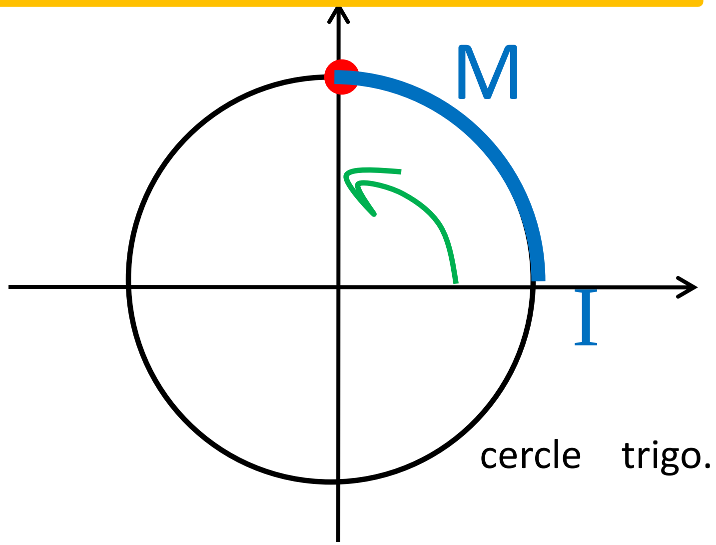
dont l'avantage est que

longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM} = \pi/2$

angle en radian $= \pi/2$ rad

réel du point M $= \pi/2$

ont même valeur numérique.



II Les radians :

1°) **Définition** : C'est une unité d'angle telle que

$$\boxed{\frac{\beta_{rad}}{2\pi} = \frac{\beta_{degré}}{360}}$$

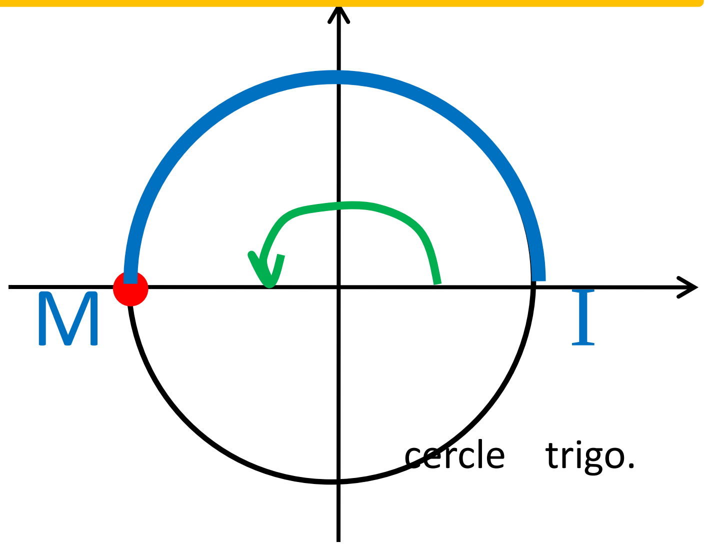
dont l'avantage est que

longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM} = \pi$

angle en radian = π rad

réel du point M = π

ont même valeur numérique.



II Les radians :

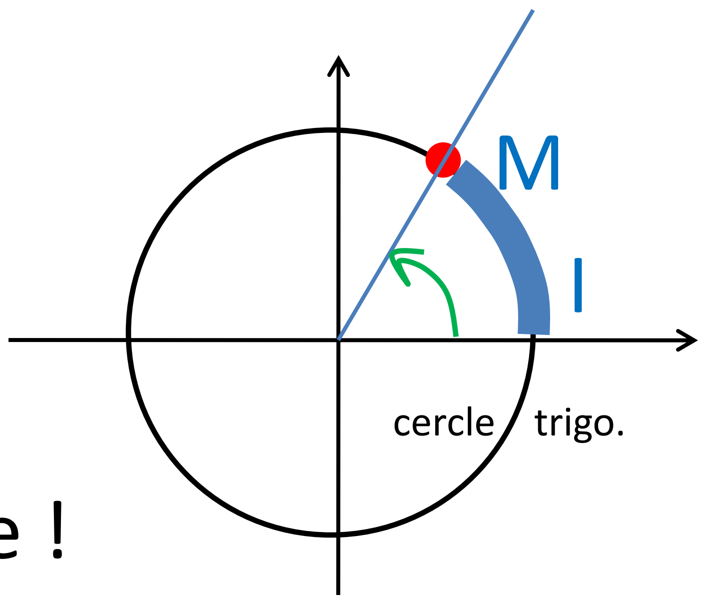
Prouvons-le : pour un certain angle ...

longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$

angle en radian

réel du point M (z dans [0 ; 2π])

ont même valeur numérique !



II Les radians :

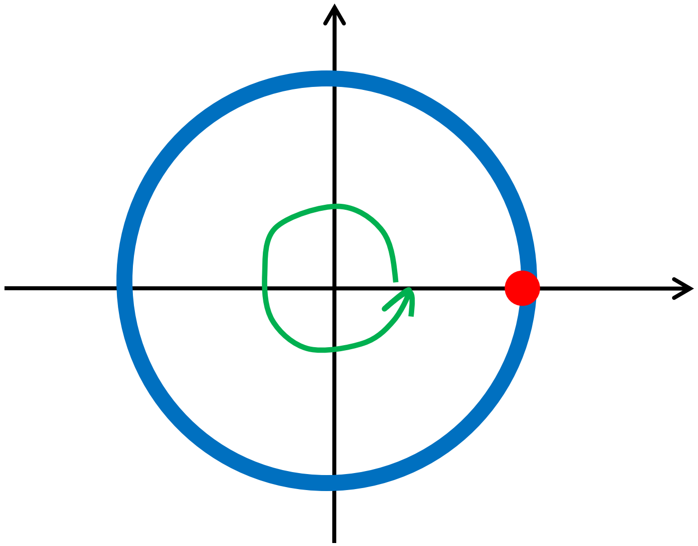
Prouvons-le : pour un angle de 360°

longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$ = circonférence = $\mathbf{2\pi}$

angle en radian

$\beta_{rad} / 2\pi = \beta_{degré} / 360$

donc $\beta_{rad} = (360 / 360) \times 2\pi = \mathbf{2\pi}$ rad



réel du point M : $z = \mathbf{2\pi}$

ont tous même valeur numérique !

II Les radians :

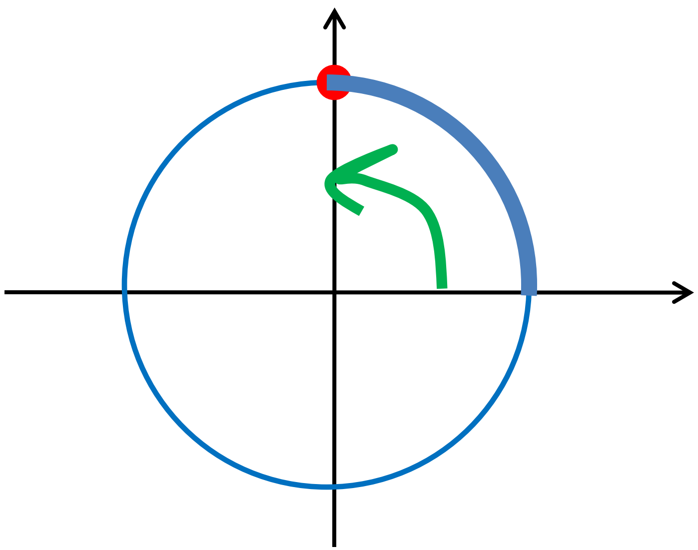
Prouvons-le : pour un angle de 90°

longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$ = ¼ circonférence = ¼ **2π** = **π/2**

angle en radian

$\beta_{rad} / 2\pi = \beta_{degré} / 360$

donc $\beta_{rad} = (90 / 360)\times 2\pi = \boldsymbol{\pi/2}$ rad



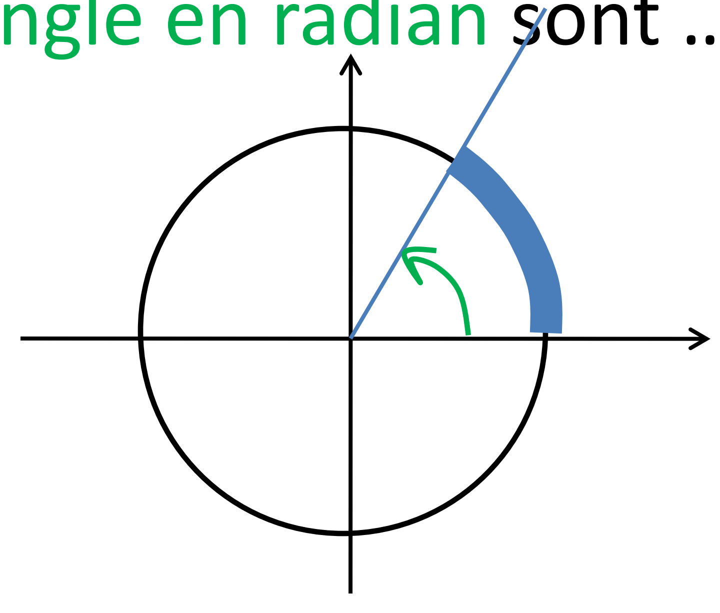
réel du point M : $z = \boldsymbol{\pi/2}$

ont tous même valeur numérique !

Application : 2°) **<u>Longueur d'un arc.</u>**

Pour un cercle de rayon R (donc non trigonométrique dès que R ≠ 1) :

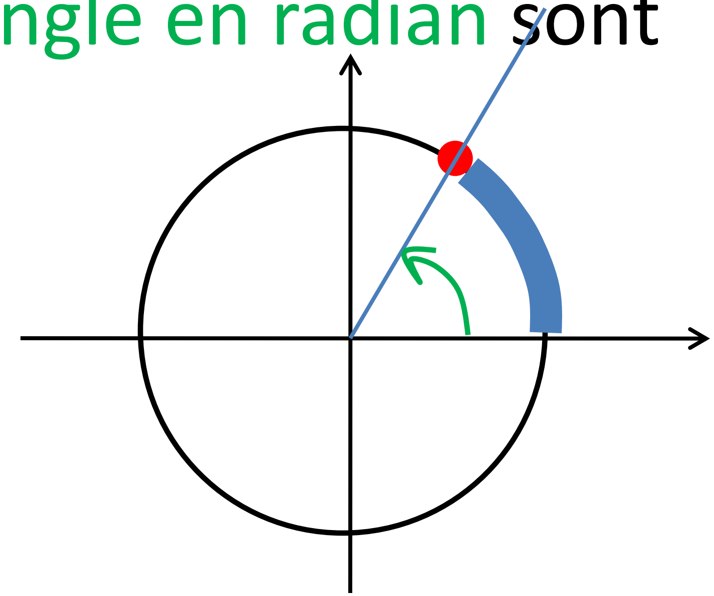
la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$ et l'angle en radian sont …



Application : 2°) **<u>Longueur d'un arc.</u>**

Pour un cercle de rayon R (donc non trigonométrique dès que $R \neq 1$) :

la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$ et l'angle en radian sont proportionnels. Donc …



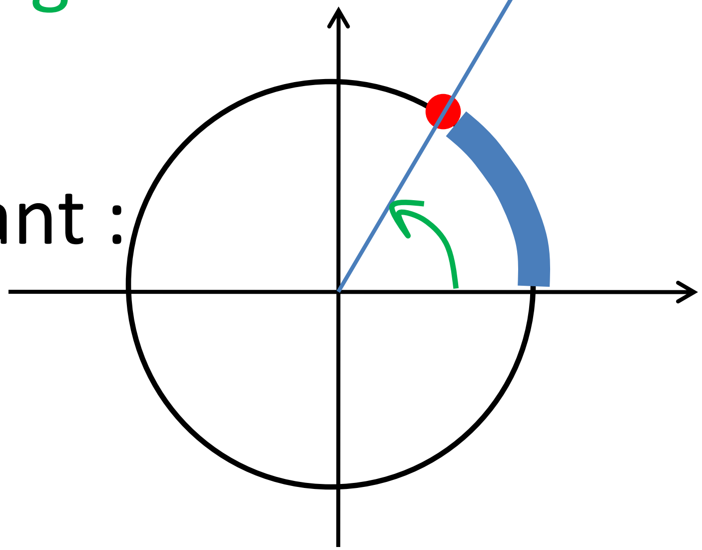
Application : 2°) **<u>Longueur d’un arc.</u>**

Pour un cercle de rayon R (donc non trigonométrique dès que R ≠ 1) :

la longueur de l’arc $\overset{\frown}{IM}$ et l’angle en radian sont proportionnels.

Donc leur rapport est constant :

$\overset{\frown}{IM} / \beta_{rad} = C^{te}$

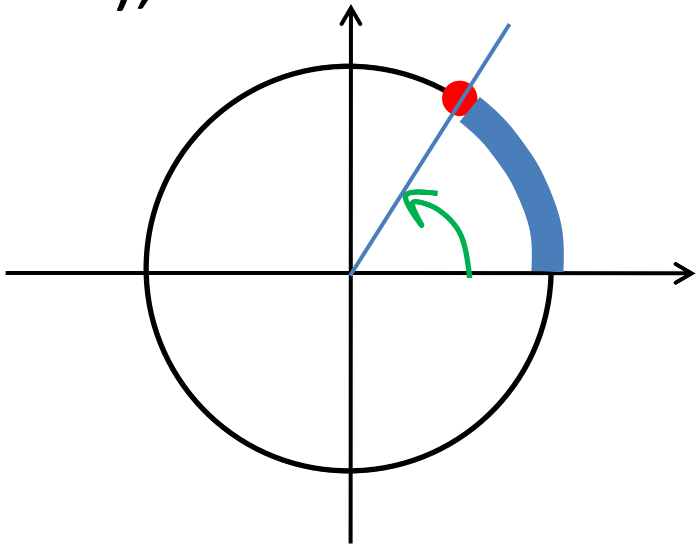


Pour un cercle de rayon R

la longueur de l'arc $\widehat{IM}$ et l'angle en radian sont proportionnels.

Donc leur rapport est constant : $\widehat{IM}$ / β_{rad} = C^{te}

Pour déterminer la valeur de la constante (qui est le coefficient de proportionnalité), il faut un arc et un angle connus : ce sont …

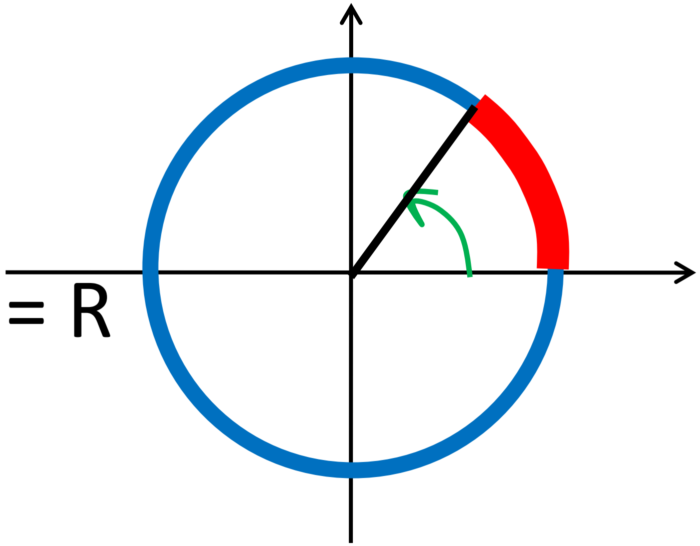


Pour un cercle de rayon R

la longueur de l'arc $\widehat{IM}$ et l'angle en radian sont proportionnels : $\widehat{IM} / \beta_{rad} = C^{te}$

Pour déterminer la valeur de la constante (qui est le coefficient de proportionnalité), il faut un arc et un angle connus :

ce sont la circonférence et l'angle 360° donc 2π radian



donc $\widehat{IM} / \beta_{rad} = (2\pi R) / (2\pi) = R$

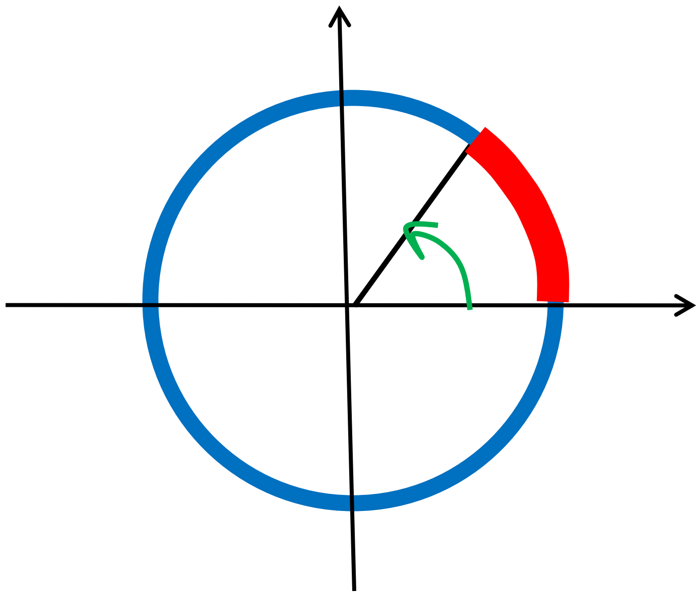
donc $\boxed{\widehat{IM} = \beta_{rad} R}$

Exercice :

Paris se trouve à la latitude Nord ≈ 48,1°.

La circonférence de la Terre fait ≈ 40000 km

Déterminez la longueur (à 1 km près) du trajet le plus court de Paris à l'Equateur en suivant la courbure de la Terre.



$$\overset{\frown}{PE} = \beta_{rad} R$$

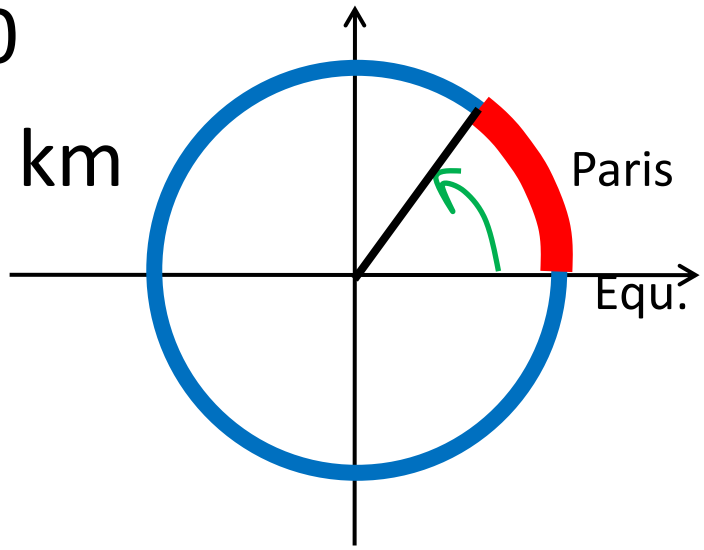
$$\frac{\beta_{rad}}{2\pi} = \frac{\beta_{degré}}{360} \quad \text{donc } \beta_{rad} \approx \frac{48{,}1}{360} 2\pi \approx 0{,}8395 \text{ rad}$$

circonférence $= 2\pi R \approx 40000$

donc $R \approx 40000/(2\pi) \approx 6366$ km

$\overset{\frown}{PE} = \beta_{rad} R \approx 0{,}8395 \times 6366$

$\approx$ **5344** km



Application :

3°) **Aire d'un secteur angulaire.**

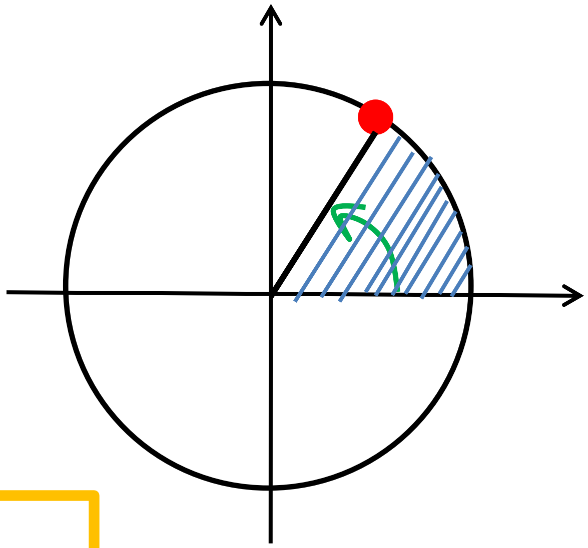
Même méthode : pour un cercle de rayon R :

l'aire du secteur angulaire et l'angle en radian sont proportionnels.

Donc leur rapport est constant :

$A / \beta_{rad} = C^{te} = \text{Aire du disque}/(2\pi)$

$= \pi R^2/(2\pi) = R^2/2$



$$\boxed{\text{Aire du secteur angulaire} = \beta_{rad} R^2/2}$$